Revista Vectores de Investigación

Journal of Comparative Studies Latin America

ISSN 1870-0128

ISSN online 2255-3371

Albert Einstein

EL PRINCIPIO DE LA RELATIVIDAD
THE PRINCIPLE OF RELATIVITY

Vol. 10 No. 10, 27-60 pp.

Albert Einstein
Premio Nobel de Física, 1921

Palabras claves: *relatividad, eletrodinámica, cinemática, gravitación*
Key Words: *relativity, electrodynamics, kinematics, gravitation*

El principio de la relatividad

THE PRINCIPLE OF RELATIVITY

DEMANDADO 2-2-2015 **REVISADO** 2-2-2015
ACEPTADO 2-2-2015

RESUMEN La verdad de una teoría está en la mente, no en los ojos.

ABSTRACT The truth of a theory is in the mind, not the eyes.

1. Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento[2]

Sabido es que, cuando se aplica a cuerpos en movimiento, la electrodinámica de Maxwell tal como actualmente [1905] se entiende normalmente conduce a asimetrías que no parecen ser inherentes a los fenómenos. Tomemos, por ejemplo, la interacción electrodinámica entre un imán y un conductor. Aquí los fenómenos observables dependen sólo del movimiento relativo del conductor y el imán, mientras que la visión habitual traza una nítida dis-

[2] "Elektrodynamik bewegter körper", 1905, No. 17, 891-921.

tinción entre los dos casos, en donde o bien uno u otro de los dos cuerpos está en movimiento. Pues, en efecto, si el imán está en movimiento y el conductor está en reposo, en la vecindad del imán aparece un campo electromagnético con una energía definida que produce una corriente dondequiera que haya localizados elementos del conductor. Pero si el imán está en reposo mientras que el conductor está en movimiento, no hay ningún campo eléctrico en la vecindad del imán, sino más bien una fuerza electromotriz en el conductor a la que no corresponde ninguna energía per se, sino que, suponiendo una igualdad del movimiento relativo en los dos casos, da lugar a corrientes eléctricas de la misma magnitud y el mismo curso que las producidas por las fuerzas eléctricas en el primer caso. Ejemplos de este tipo, junto con los infructuosos intentos de detectar un movimiento de la Tierra con relación al "medio lumínico", llevan a la conjetura de que ni los fenómenos de la mecánica, ni tampoco los de la electrodinámica tienen propiedades que correspondan al concepto de reposo absoluto. Más bien, las mismas leyes de la electrodinámica y la óptica serán válidas para todos los sistemas de coordenadas en los que rigen las ecuaciones de la mecánica, como ya se ha demostrado para cantidades de primer orden. Elevaremos esta conjetura (cuyo contenido será denominado en adelante "el principio de relatividad") al estatus de un postulado e introduciremos también otro postulado, que es sólo aparentemente incompatible con él, a saber, que la luz se propaga siempre en el espacio vacío con una velocidad definida V que es independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor. Estos dos postulados bastan para conseguir una electrodinámica de cuerpos en movimiento simple y consistente basada en la teoría de Maxwell para cuerpos en reposo. La introducción de un "éter lumínico" se mostrara superflua, puesto que la idea que se va a desarrollar aquí no requerirá un "espacio en reposo absoluto" dotado de propiedades especiales, ni asigna un vector velocidad a un punto del espacio vacío donde están teniendo lugar procesos electromagnéticos.

Como toda la electrodinámica, la teoría que va a desarrollarse aquí está basada en la cinemática de un cuerpo rígido, puesto que las afirmaciones de una teoría semejante tienen que ver con las relaciones entre cuerpos rígidos (sistemas de coordenadas), relojes y procesos electromagnéticos. Una consideración insuficiente de esta circunstancia está en la raíz de las dificultades con las que debe enfrentarse actualmente la electrodinámica de los cuerpos en movimiento.

1.1 Parte cinemática

1.1.1 Definición de simultaneidad

Consideremos un sistema de coordenadas en el que son válidas las ecuaciones mecánicas de Newton[3]. Para distinguir nominalmente dicho sistema de aquellos que van a introducirse más tarde, y para hacer esta presentación más precisa, le llamaremos "sistema de reposo". Si una partícula está en reposo con respecto a este sistema de coordenadas, su posición relativa al último puede determinarse por medio de varas de medir rígidas utilizando los métodos de la geometría euclidiana y expresarse en coordenadas cartesianas.

Si queremos describir el *movimiento* de una partícula, damos los valores de sus coordenadas como funciones del tiempo. Sin embargo, debemos tener en cuenta que una descripción matemática de este tipo sólo tiene sentido físico si tenemos ya claro lo que entendemos aquí por "tiempo". Debemos tener en cuenta que todos nuestros juicios que implican al tiempo son siempre juicios sobre *sucesos simultáneos.* Si, por ejemplo, yo digo que "el tren llega aquí a las 7 en punto", eso significa, más o menos, que "la manecilla pequeña de mi reloj apuntando a las 7 y la llegada del tren son sucesos simultáneos"[4]. Podría parecer que todas las dificultades implicadas en la definición de "tiempo" podrían superarse si sustituyo "posición de la manecilla pequeña de mi reloj" por "tiempo". Semejante definición es suficiente si va a considerarse un tiempo exclusivamente para el lugar en el que está localizado el reloj; pero la definición ya no es satisfactoria cuando tienen que enlazarse temporalmente series de sucesos que ocurren en localizaciones diferentes, o –lo que es equivalente– cuando hay que evaluar temporalmente sucesos que ocurren en lugares remotos del reloj.

Por supuesto, podríamos contentarnos con evaluar el tiempo de

[3] En primera aproximación.
[4] No se discute la inexactitud que acecha tras el concepto de simultaneidad de dos acontecimientos que se producen aproximadamente en el mismo lugar, que sólo puede ser eliminada por abstracción.

los sucesos estacionando en el origen de las coordenadas a un observador con un reloj; este observador asigna a cada suceso a evaluar la posición correspondiente de las manecillas del reloj cuando a través del espacio vacío le llega una señal luminosa procedente de dicho suceso. Sin embargo, sabernos por experiencia que una coordinación semejante tiene el inconveniente de que no es independiente de la posición del observador con el reloj. Llegamos a un arreglo más práctico mediante el siguiente argumento.

Si existe un reloj en el punto A en el espacio, entonces un observador situado en A puede evaluar el tiempo de los sucesos en la inmediata vecindad de A hallando las posiciones de las manecillas del reloj que son simultáneas con dichos sucesos. Si existe otro reloj en el punto B que se asemeja en todos los aspectos al que hay en A, entonces el tiempo de los sucesos en la inmediata vecindad de B puede ser evaluado por un observador en B. Pero no es posible comparar el tiempo de un suceso en A con uno en B sin una estipulación adicional. Hasta aquí hemos definido sólo un “tiempo-A” y un “tiempo-B”, pero no un “tiempo” común para A y B. El último puede ahora determinarse estableciendo por definición que el “tiempo” requerido por la luz para viajar de A a B es igual al “tiempo” que requiere para viajar de B a A. En efecto, supongamos que un rayo de luz parte de A hacia B en un “tiempo-A” t_A, es reflejado desde B hacia A en un “tiempo-B” t_B, y llega de nuevo a A en un “tiempo-A”t'_A. Los dos relojes son síncronos por definición

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

Suponemos que es posible que esta definición de sincronicidad esté libre de contradicciones, y que lo esté para puntos en número arbitrario; y por consiguiente son válidas en general las relaciones siguientes:

1 Si el reloj en B marcha de forma síncrona con el reloj en A, el reloj en A marcha de forma síncrona con el reloj en B.

2 Si el reloj en A marcha de forma síncrona con el reloj en B así como con el reloj en C, entonces los relojes en B y C también marchan de forma síncrona uno con relación al otro.

Por medio de ciertos experimentos (mentales) físicos hemos establecido lo que debe entenderse por relojes síncronos en reposo relativo y situados en diferentes lugares, y con ello hemos llegado obviamente a definiciones de “síncrono” y “tiempo”. El “tiempo” de un suceso es la lectura obtenida simultáneamente de un reloj en reposo situado en el lugar del suceso, que para todas las determinaciones temporales marcha de forma síncrona con un reloj especificado en reposo, y por supuesto con el reloj especificado.

Basados en la experiencia, estipulamos además que la cantidad

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

es una constante universal (la velocidad de la luz en el espacio vacío).

Es esencial que hayamos definido el tiempo por medio de relojes en reposo en el sistema de reposo; puesto que el tiempo recién definido está relacionado con el sistema en reposo, le llamaremos “el tiempo del sistema de reposo”.

1.1.2 Sobre la relatividad de longitudes y tiempos

Las consideraciones siguientes están basadas en el principio de relatividad y el principio de constancia de la velocidad de la luz. Definimos estos dos principios como sigue:

1. Si los dos sistemas de coordenadas están en movimiento relativo de traslación paralela uniforme, las leyes de acuerdo con las cuales cambian los estados de un sistema físico no dependen de con cuál de los dos sistemas están relacionados dichos cambios.

2. Todo rayo luminoso se mueve en el sistema de coordenadas “de reposo” con una velocidad fija V, independientemente de si este rayo luminoso sea emitido por un cuerpo en reposo o en movimiento. Por lo tanto,

velocidad=recorrido de la luz/intervalo de tiempo

donde “intervalo de tiempo” debería entenderse en el sentido de la definición dada en el punto 1.1.1.

Tomemos una vara rígida en reposo; sea l su longitud, medida por una vara de medir que está también en reposo. Imaginemos ahora que se coloca el eje de la vara a lo largo del eje X del sistema de coordenadas en reposo, y que la vara es puesta entonces en movimiento de traslación paralela uniforme (con velocidad v*)* a lo largo del eje X en la dirección de las *x* crecientes. Preguntamos sobre la longitud de la vara de medir, que imaginamos debe establecerse por las dos operaciones siguientes:

1 El observador se mueve junto con la mencionada vara de medir y la vara rígida a ser medida, y mide la longitud de esta vara tendiendo la vara de medir de la misma manera que si la vara a ser medida, el observador y la vara de medir estuvieran en reposo.

2 Utilizando relojes en reposo y síncronos en el sistema de reposo como se esbozó en la sección 1, el observador determina en qué puntos del sistema de reposo están situados el principio y el final de la vara a ser medida en algún tiempo t dado. La distancia entre estos dos puntos, medida con la vara utilizada antes –pero no en reposo– es también una longitud que podemos llamar la "longitud de la vara".

De acuerdo con el principio de relatividad, la longitud determinada por la operación (a), que llamaremos "la longitud de la vara en el sistema en movimiento", debe ser igual a la longitud l de la vara en reposo. La longitud determinada utilizando la operación (1), que llamaremos "la longitud de la vara (en movimiento) en el sistema de reposo" será determinada sobre la base de nuestros dos principios, y encontraremos que difiere de l.

La cinemática actual [1905] supone implícitamente que las longitudes determinadas por las dos operaciones anteriores son exactamente iguales entre sí, o, en otras palabras, que en el tiempo t un cuerpo rígido en movimiento es totalmente reemplazable, en cuanto a su geometría, por el *mismo* cuerpo cuando está *en reposo* en una posición concreta.

Además, imaginamos los dos extremos *(*A y B) de la vara provistos de relojes que son síncronos con los relojes del sistema de reposo, i. e., cuyas lecturas corresponden siempre al "tiempo del sistema de reposo" en las localizaciones que los relojes resultan ocupar; por lo tanto, estos relojes son "síncronos en el sistema de reposo".

Consideremos igualmente que cada reloj tiene un observador que se mueve con él, y que estos observadores aplican a los dos relojes el criterio para el ritmo síncrono de dos relojes formulado en la sección 1. Sea un rayo de luz que parte de A en el tiempo t_A, es reflejado en B en el tiempo t_B, y llega de nuevo a A en el tiempo t'^{*}_A. Teniendo en cuenta el principio de relatividad de la velocidad de la luz, encontramos que

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v} \qquad \text{y} \qquad t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

donde r_{AB} denota la longitud de la vara en movimiento, medida en el sistema de reposo. Los observadores que se mueven conjuntamente con la vara encontrarían así que los dos relojes no marchan de forma síncrona, mientras que los observadores en el sistema de reposo les dirían que están marchando de forma síncrona.

Se aprecia que no podemos atribuir significado absoluto al concepto de simultaneidad; en su lugar, dos sucesos que son simultáneos cuando son observados desde algún sistema de coordenadas concreto ya no pueden considerarse simultáneos cuando son observados desde un sistema que está en movimiento relativo a dicho sistema.

2 Sobre la influencia de la gravitación en la propagación de la luz[5]

En la memoria *Jahruch für Radiokt und Elektronik*[6] traté de responder a la pregunta de si la propagación de la luz está influida por la gravitación. Vuelvo a este tema porque mi presentación previa de la cuestión no me satisface; y por una razón más importante, porque ahora veo que una de las consecuencias más importantes de mi primer tratamiento puede ponerse a prueba experimentalmente. En efecto, de la teoría que aquí se expone se sigue que los rayos de luz que pasan cerca del Sol son desviados por el campo gravitatorio de éste, de modo que la distancia angular entre el Sol y una estrella fija que parece próxima a él se incrementa aparente-

[5] “Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes”, 1911, No. 35, 898-908.
[6] “Ueber das Relativitatprinzip und die aus demselb gezogenen Folgerungen”, 1907, No. 4, 411-462.

mente en casi un segundo de arco.

En el curso de estas reflexiones se obtienen resultados adicionales en relación a la gravitación. Pero como la exposición de todo el grupo de consideraciones sería bastante difícil de seguir, en las páginas que siguen sólo se ofrecerán algunas reflexiones muy elementales, a partir de las cuales el lector podrá informarse fácilmente acerca de las hipótesis de la teoría y su línea de razonamiento. Las relaciones aquí deducidas, incluso si el fundamento teórico es correcto, son válidas sólo en primera aproximación.

2.1 Una hipótesis respecto a la naturaleza física del campo gravitatorio

En un campo gravitatorio homogéneo (aceleración de la gravedad γ) sea un sistema de coordenadas estacionario K, orientado de forma que las líneas de fuerza del campo gravitatorio corren en la dirección negativa del eje *z.* En un espacio libre de gravitación, sea un segundo sistema de coordenadas K', que se mueve con aceleración uniforme (γ) en la dirección positiva del eje *z.* Para evitar complicaciones innecesarias, de momento no consideramos la teoría de la relatividad sino que consideramos ambos sistemas desde el punto de vista acostumbrado en cinemática, y los movimientos que ocurren en ellos desde la mecánica ordinaria.

Con respecto a K, así como con respecto a K', los puntos materiales que están sujetos a la acción de otros puntos materiales se mueven de acuerdo con las ecuaciones

$$\frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} = -\gamma$$

Para el sistema acelerado K' esto se sigue directamente del principio de Galileo; pero para el sistema K, en reposo en un campo gravitatorio homogéneo, se sigue a partir de la experiencia de que todos los cuerpos en un campo semejante son igual y uniformemente acelerados. Esta experiencia, la de la caída igual de todos los cuerpos en el campo gravitatorio, es una de las más universales que ha ofrecido la observación de la naturaleza; pero a pesar de eso la ley no ha encontrado ningún lugar en el fundamento de nuestro edificio del universo físico.

Llegamos a una interpretación muy satisfactoria de esta ley de experiencia, si suponemos que los sistemas K y K' son exactamente equivalentes desde el punto de vista físico; es decir, si suponemos que podemos considerar igualmente bien que el sistema K está en un espacio libre de campos gravitatorios si al mismo tiempo consideramos K uniformemente acelerado. Esta hipótesis de equivalencia física exacta hace imposible que hablemos de la *aceleración absoluta* del sistema de referencia, de la misma forma que la teoría de la relatividad habitual nos prohíbe hablar de la *velocidad absoluta* de un sistema[7]; y hace que la caída igual de todos los cuerpos en un campo gravitatorio parezca una norma.

Mientras nos limitemos a procesos puramente mecánicos en el dominio donde es válida la mecánica de Newton, estamos seguros de la equivalencia de los sistemas K y K'. Pero esta concepción nuestra no tendrá ninguna significación más profunda a menos que los sistemas K y K' sean equivalentes can respecto a todos los procesos físicos, es decir, a menos que las leyes de la naturaleza con respecto a K estén en completo acuerdo con las leyes con respecto a K'. Suponiendo que es así, llegamos a un principio que, si es realmente verdadero, tiene gran importancia heurística, pues por consideración teórica de los procesos que tienen lugar con respecto a un sistema de referencia con aceleración uniforme, obtenemos información acerca del curso de los procesos en un campo gravitatorio homogéneo. Ahora mostraremos, en primer lugar, desde el punto de vista de la teoría de la relatividad ordinaria, qué grado de probabilidad es inherente a nuestra hipótesis.

2.2 Sobre la gravitación de la energía

Un resultado de la teoría de la relatividad es que la masa inerte de un cuerpo aumenta con la energía que contiene; si el aumento de energía equivale a E, el aumento en la masa inerte es igual a E/c^2, donde *e* denota la velocidad de la luz. Ahora bien, ¿hay un aumento de masa gravitatoria correspondiente a este aumento de masa inerte? Si no lo hay, entonces un cuerpo caería en el campo gravi-

[7] Por supuesto, no podernos reemplazar cualquier campo gravitatorio *arbitrario* por un estado de movimiento del sistema sin un campo gravitatorio, como tampoco, por una transformación de relatividad, podemos transformar en reposo cualquier tipo de movimiento de todos los puntos de un medio.

tatorio con aceleración variable según la energía que contuviera. Ya no podría mantenerse ese resultado altamente satisfactorio de la teoría de la relatividad por el que la ley de conservación de la masa se fusiona en la ley de conservación de la energía, porque nos veríamos obligados a abandonar la ley de conservación de la masa en su forma antigua para la masa inerte, y mantenerla para la masa gravitatoria.

Esto debe considerarse muy improbable. Por otra parte, la teoría de la relatividad habitual no nos proporciona ningún argumento a partir del cual inferir que el peso de un cuerpo depende de la energía contenida en el mismo. Pero demostraremos que nuestra hipótesis de la equivalencia de los sistemas K y K' nos da la gravitación de la energía como una consecuencia necesaria.

Sean dos sistemas materiales S_1 y S_2 provistos de instrumentos de medida, situados en el eje *z* de K a la distancia *h* uno de otro[8], de modo que el potencial gravitatorio en S_2 es mayor que el potencial en S_1, en una cantidad γ *h.* Emitida una cantidad definida de energía E desde S_2 hacia S_1. Medidas las cantidades de energía en S_1 y S_2 por aparatos que –llevados a una misma posición *z* en el sistema y comparados allí– serán perfectamente iguales. En cuanto al proceso de esta transmisión de energía por radiación no podemos hacer ninguna afirmación *a priori,* porque no conocernos la influencia del campo gravitatorio sobre la radiación y los instrumentos de medida en S_1 y S_2.

Pero por nuestro postulado de la equivalencia de K y K', en lugar del sistema K en un campo gravitatorio homogéneo, podemos poner el sistema K' libre de gravitación, que se mueve con aceleración uniforme en la dirección de *z* positivo, y con cuyo eje *z* están rígidamente conectados los sistemas materiales S_1 y S_2.

Juzgamos el proceso de la transferencia de energía por radiación de S_2 a S_1 desde un sistema K_0, que debe estar libre de aceleración. Supongamos que en el instante en que la energía radiante E_2 es emitida desde S_2 hacia S_1 la velocidad relativa de K' con respecto a K_0 es cero. La radiación llegará a S_1 cuando haya transcurrido un tiempo *h/c* (en primera aproximación). Pero en este instante la velocidad de S_1 con respecto a K_0 es γ *h/c=v.* Por lo tanto, por la

[8] Las dimensiones de S_1 y S_2 se consideran infinitamente pequeñas en comparación con *h*.

teoría de la relatividad ordinaria la radiación que llega a S, no pasee la energía E_2 sino una energía mayor E_1 que está relacionada con E_2 en primera aproximación, por la ecuación[9]

$$E_1 = E_2\left(1 + \frac{v}{c}\right) = E_2\left(1 + \gamma\frac{h}{c^2}\right) \tag{1}$$

Por nuestra hipótesis, exactamente la misma relación es válida si el mismo proceso tiene lugar en el sistema K, que no está acelerado pero en donde existe un campo gravitatorio. En este caso podemos reemplazar γ h por el potencial Φ del vector gravitación en S_2, si la constante arbitraria de Φ en S_1 se hace igual a cero. Entonces tenemos la ecuación

$$E_1 = E_2 + \frac{E_2}{c^2}\phi \tag{1a}$$

Esta ecuación expresa la ley de energía para el proceso bajo observación. La energía E_1 que llega a S_1 es mayor que la energía S_2, medida por los mismos medios, que fue emitida en S_2, siendo el exceso la energía potencial de la masa E_2/c^2 en el campo gravitatorio. Se prueba así que para el cumplimiento del principio de la energía tenernos que adscribir a la energía E, antes de su emisión en S_2, una energía potencial debida a la gravedad, que corresponde a la masa gravitatoria E_2/c^2. Nuestra hipótesis de la equivalencia de K y K' elimina así la dificultad mencionada al principio de esta sección y que la teoría de la relatividad ordinaria deja sin resolver.

El significado de este resultado se muestra de manera particularmente clara si consideramos el siguiente ciclo de operaciones:

1. La energía E, medida en S_2, es emitida en forma de radiación de S_2 hacia S_1, donde, por el resultado recién obtenido, se absorbe la energía E $(1+\gamma h/c^2)$, medida en S_1.

2. Se hace descender un cuerpo W de masa M desde S_2 a S_1, haciéndose un trabajo M γ*h* en el proceso.

3. La energía E es transferida desde S_1 al cuerpo W mientras W está en S_1. Cámbiese por ello la masa M de modo que adquiere el

[9] Véase *supra.*

valor M'.

4. Sea elevado de nuevo W hasta S_2, haciéndose un trabajo M' γh en este proceso.

5. Sea E transferida de vuelta de W a S_2.

El efecto de este ciclo es simplemente que S_1 ha experimentado el incremento de energía E $\gamma h/c^2$, y que la cantidad de energía M' γh- M γh ha sido transmitida al sistema en forma de trabajo mecánico. Por el principio de la energía, debemos tener

$$E\gamma\frac{h}{c^2} = M'\gamma h - M\gamma h$$

o

$$M' - M = E/c^2 \tag{1b}$$

El incremento en la masa *gravitatoria* es así igual a E/c^2, y por consiguiente igual al incremento en masa *inerte* dado por la teoría de la relatividad.

El resultado se desprende aún más directamente de la equivalencia de los sistemas K y K', según la cual la masa gravitatoria respecto de K es exactamente igual a la masa inerte respecto de K'; la energía debe por lo tanto poseer una masa *gravitatoria* que es igual a su masa *inerte.* Si se suspende una masa M_0 de una balanza de resorte en el sistema K', la balanza indicará el peso aparente $M_0\gamma$ debido a la inercia de M_0. Si se transfiere a M_0 la cantidad de energía E, la balanza de resorte, por la ley de inercia de la energía, indicará $(M_0+E/c^2)\gamma$. Por nuestra hipótesis fundamental, exactamente lo mismo debe ocurrir cuando se repite el experimento en el sistema K, es decir, en el campo gravitatorio.

2.3 Tiempo y velocidad de la luz en el campo gravitatorio

Si la radiación emitida en el sistema uniformemente acelerado K' en S_2 hacia S_1 tenía la frecuencia ν_2 con relación al reloj en S_2, entonces, a su llegada a S_1 ya no tiene la frecuencia ν_2, con relación a un reloj idéntico en S_1, sino una frecuencia mayor ν_1, tal que en primera aproximación

$$\nu_1 = \nu_2\left(1 + \gamma\frac{h}{c^2}\right) \tag{2}$$

En efecto, si introducimos otra vez el sistema de referencia no acelerado K_2, con respecto al cual, en el instante de la emisión de luz, K' no tiene velocidad, entonces S_1, en el instante de llegada de la radiación a S_1, tiene la velocidad *γh/c* con respecto a K_0, de lo que, por el principio de Doppler, resulta inmediatamente la relación dada.

De acuerdo con nuestra hipótesis de la equivalencia de los sistemas K y K', esta ecuación también es válida para el sistema de coordenadas estacionario K, en donde hay un campo gravitatorio uniforme, si en el mismo tiene lugar la trasferencia por radiación tal como se ha descrito. Se sigue, entonces, que un rayo luminoso emitido en S_2 con un potencial gravitatorio definido, y que pasee en su emisión la frecuencia v_2 –comparada con un reloj en S_2– poseerá, a su llegada a S_1, una frecuencia diferente v_1 –medida por un reloj idéntico en S_1-, Para *γh* sustituimos el potencial gravitatorio *Φ* de S_2– tomando como cero el de S_1- y suponemos que la relación que hemos deducido para el campo gravitatorio homogéneo es también válida para otras formas de campo. Entonces

$$v_1 = v_2\left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right) \qquad (2a)$$

Este resultado (que por nuestra deducción es válido en primera aproximación) permite, en primer lugar, la siguiente aplicación. Sea v_0 el número de vibración de un generador de luz elemental, medido por un delicado reloj en el mismo lugar. Imaginemos a ambos en un lugar en la superficie del Sol (donde está localizado nuestro S_2). De la luz allí emitida, una porción alcanza la Tierra (S_1), donde medirnos la frecuencia de la luz que llega con un reloj U que se parece en todo al recién mencionado. Entonces por (2a)

$$v = v_0\left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right)$$

donde *Φ* es la diferencia (negativa) de potencial gravitatorio entre la superficie del Sol y la Tierra. Así pues, de acuerdo con nuestra idea, las líneas espectrales de la luz solar deben estar algo desplazadas hacia el rojo, comparadas con las correspondientes líneas espectrales de las fuentes de luz terrestres, en la cantidad relativa

$$\frac{v_0 - v}{v_0} = -\frac{\phi}{c^2} = 2{,}10^{-6}$$

Si se conocieran exactamente las condiciones en las que aparecen las bandas solares, este desplazamiento sería susceptible de ser medido. Pero dado que otras influencias (presión, temperatura) afectan a la posición de los centros de las líneas espectrales, es difícil descubrir si realmente existe la influencia inferida del potencial gravitatorio[10].

En una consideración superficial la ecuación (2), respectivamente la (2a), parece afirmar un absurdo. Si existe transmisión constante de luz de S_2 a S_1, ¿cómo puede llegar a S_1 cualquier otro número de períodos por segundo distinto del emitido en S_2? Pero la respuesta es sencilla. No podemos considerar v_2 *o*, respectivamente v_1 simplemente como frecuencias (como número de períodos por segundo) puesto que aún no hemos determinado el tiempo en el sistema K. Lo que denota v_2 es el número de períodos con referencia a la unidad de tiempo del reloj U en S_2, mientras que *v,* denota el número de períodos por segundo con referencia al reloj idéntico en S_1. Nada nos obliga a suponer que haya que considerar que los relojes U en potenciales gravitatorios diferentes marchan al mismo ritmo. Por el contrario, debemos ciertamente definir el tiempo en K de tal manera que el número de crestas y vientres de onda entre S_2 y S_1 sea independiente del valor absoluto del tiempo; pues el proceso bajo observación es por naturaleza estacionario. Si no satisficiéramos esta condición llegaríamos a una definición de tiempo por aplicación de la cual el tiempo se fusionaría explícitamente en las leyes de la naturaleza, y esto ciertamente sería poco natural y poco práctico. Por consiguiente, los dos relojes en S_1 y S_2 no dan ambos el "tiempo" correctamente. Si medirnos el tiempo en S1 con el reloj U, entonces debernos medir el tiempo en S_2 con un reloj que marcha $1+\Phi/c^2$ veces más lentamente que el reloj U cuando se compara con U en uno y el mismo lugar. Pues cuando se mide por dicho reloj, la frecuencia del rayo de luz antes considerado es en su emisión

$$v_2\left(1+\frac{\phi}{c^2}\right)$$

y por consiguiente es, por (2a), igual a la frecuencia v_1 del mismo rayo de luz a su llegada a S_1.

---

[10] L. E Jewell (1987, 6: 84) y especialmente C. Fabry y H. Boísson (1909, 148: 688-690) han encontrado realmente tales desplazamientos de las líneas espectrales finas hacia el extremo rojo del espectro, del orden de magnitud aquí calculado, pero lo han atribuido a un efecto de la presión en la capa absorbente.

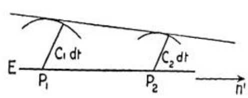
Esto tiene una consecuencia de fundamental importancia para nuestra teoría. Pues si medirnos la velocidad de la luz en diferentes lugares en el sistema acelerado y libre de gravitación K', empleando relojes U de idéntica constitución, obtenemos la misma magnitud en todos estos lugares. Lo mismo es válido, por nuestra hipótesis fundamental, también para el sistema K. Pero por lo que se acaba de decir, debemos utilizar relojes de diferente constitución para medir el tiempo en lugares con diferente potencial gravitatorio. Para medir el tiempo en un lugar que, con respecto al origen de coordenadas, tiene el potencial gravitatorio Φ debemos emplear un reloj que –cuando se lleva al origen de coordenadas– va $(1+\Phi/c^2)$ veces más lento que el reloj utilizado para medir el tiempo en el origen de coordenadas. Si llamamos c_o a la velocidad de la luz en el origen de coordenadas, entonces la velocidad de la luz c en un lugar con el potencial gravitatorio Φ estará dada por la relación

$$c = c_0\left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right) \qquad (3)$$

El principio de constancia de la velocidad de la luz es válido según esta teoría en una forma diferente de la que normalmente subyace a la teoría de la relatividad ordinaria.

2.4 Curvatura de rayos luminosos en el campo gravitatorio

A partir de la proposición que se acaba de demostrar, que la velocidad de la luz en el campo gravitatorio es función del lugar, podemos inferir fácilmente, por medio del principio de Huygens, que los rayos luminosos que se propagan a través de un campo gravitatorio sufren una desviación. En efecto, sea E un frente de onda de una onda luminosa plana en el instante *t,* y sean P_1 y P_2 dos puntos en dicho plano a distancia unidad uno de otro.



P_1 y P2 están en el plano del papel, que se escoge de modo que el coeficiente diferencial de Φ, tomado en la dirección de la normal al plano, se anula, y por consiguiente también lo hace el de *c.* Obtenemos el correspondiente frente de onda en el instante *t+dt,* o, más bien, su línea de intersección con el plano del papel, describiendo círculos alrededor de los puntos P_1 y P_2 con radios c_1dt y c_2dt, respectivamente; donde c_1 y c_2 denotan la velocidad de la luz en los puntos P_1 y P_2 respectivamente, y trazando la tangente a dichos círculos. El ángulo en que se desvía el rayo de luz en el camino *cdt* es por consiguiente

$$(c_1 - c_2)\,dt = -\frac{dc}{dn'}\,dt,$$

si me dimos el ángulo positivamente cuando el rayo se curva hacia el lado de *n'* creciente. El ángulo de desviación por unidad de camino del rayo luminoso es por lo tanto

$$-\frac{1}{c}\frac{dc}{dn'},\ o\ \ por(3)\ -\frac{1}{c^2}\frac{d\phi}{dn'}$$

Finalmente, obtenemos para la desviación que experimenta un rayo luminoso hacia el lado *n'* en cualquier trayectoria*(s)* la expresión

$$a = -\frac{1}{c^2}\int\frac{d\phi}{dn'}ds \tag{4}$$

Podríamos haber obtenido el mismo resultado directamente considerando la propagación de un rayo luminoso en el sistema uniformemente acelerado K', Y trasladando el resultado al sistema K, y de allí al caso de un campo gravitatorio de cualquier forma.

Por la ecuación (4) un rayo de luz que pasa junto a un cuerpo celeste sufre una desviación hacia el lado del potencial gravitatorio decreciente, es decir, el lado dirigido hacia el cuerpo celeste, de magnitud

$$a = -\frac{1}{c^2} = \int_{\phi - \frac{1}{2}\eta}^{\phi + \frac{1}{2}\eta}\frac{kM}{r^2}\cos\theta ds = 2\frac{kM}{r^2\Delta}$$

donde *k* denota la constante de gravitación, M la masa del cuerpo celeste, Δ la distancia del rayo al centro del cuerpo. En consecuencia, un rayo de luz que pasa junto al Sol sufre una desviación de $4{,}10^{-6}$=0,83 segundos de arco. La distancia angular de la estrella al centro del Sol parece estar aumentada en esta cantidad. Puesto que las estrellas fijas en regiones del cielo próximas al Sol son visibles durante los eclipses totales de Sol, esta consecuencia de la teoría puede compararse con la experiencia. Con el planeta Júpiter el desplazamiento esperado llega a aproximadamente 1/100) de la cantidad dada. Sería deseable que los astrónomos asumieran la cuestión aquí planteada. Pues, aparte de cualquier teoría, está la cuestión de si es posible detectar con los equipos actualmente disponibles una influencia de los campos gravitatorios en la propagación de la luz.

4 El fundamento de la teoría de la relatividad general[11]

4.1 Consideraciones fundamentales sobre el postulado de relatividad

4.1.1 Observaciones sobre la teoría de la relatividad especial

La teoría de la relatividad especial se basa en el siguiente postulado, que también es satisfecho por la mecánica de Galileo y Newton.

Si se escoge un sistema de coordenadas K con relación al cual son válidas las leyes físicas en su forma más simple, las *mismas* leyes son también válidas con relación a cualquier otro sistema de coordenadas K' que se mueve con movimiento de traslación uniforme con respecto a K. Llamamos a este postulado el “principio de relatividad especial”. La palabra “especial” quiere dar a entender que el principio está restringido al caso en que K' tiene un movimiento de traslación uniforme con respecto a K, pero que la equivalencia de K' y K no se extiende al caso de movimiento no uniforme de K' con respecto a K.

Así pues, la teoría de la relatividad especial no se aparta de la mecánica clásica por el postulado de relatividad, sino por el postulado de la constancia de la velocidad de la luz *in vacuo,* a partir del cual, en combinación con el principio de relatividad especial, se sigue, en la forma bien conocida, la relatividad de la simultaneidad, la transformación lorentziana y las leyes relacionadas para el com-

[11] “Die Grundlage der allgemeinen Relarivitätstheorie”, 1916, No. 49, 769-822.

portamiento de cuerpos y relojes en movimiento.

La modificación a la que la teoría de la relatividad especial ha sometido a la teoría del espacio y el tiempo es realmente de largo alcance, pero hay un punto importante que ha permanecido inalterado. Pues las leyes de la geometría, incluso según la teoría de la relatividad especial, tienen que ser interpretadas directamente como leyes relacionadas con las posibles posiciones relativas de cuerpos sólidos en reposo; y, de una manera más general, las leyes de la cinemática deben interpretarse como leyes que describen las relaciones de medida de cuerpos y relojes. A dos puntos materiales seleccionados de un cuerpo rígido estacionario corresponde siempre una distancia de longitud bien definida, que es independiente de la localización y orientación del cuerpo, y es también independiente del tiempo. A dos posiciones seleccionadas de las manecillas de un reloj en reposo con respecto a un sistema de referencia privilegiado, corresponde siempre un intervalo de tiempo de longitud definida, que es independiente del lugar y el tiempo. Pronto veremos que la teoría de la relatividad especial no puede adherirse a esta interpretación física sencilla del espacio y el tiempo.

4.1.2 La necesidad de una extensión del postulado de relatividad

En mecánica clásica, y no menos en la teoría de la relatividad especial, existe un defecto epistemológico inherente que fue señalado claramente, quizá por primera vez, por Ernst Mach. Lo discutiremos mediante el siguiente ejemplo: dos cuerpos fluidos del mismo tamaño y naturaleza se mantienen libremente en el espacio a una distancia tan grande uno de otro y de todas las demás masas que sólo hay que tener en cuenta aquellas fuerzas gravitatorias que aparecen a partir de la interacción de diferentes partes del mismo cuerpo. Sea invariable la distancia entre los dos cuerpos, y supongamos que en ninguno de los dos cuerpos hay movimientos relativos de unas partes con respecto a otras. Pero supongamos que una de las dos masas, juzgada por un observador en reposo con respecto a la otra masa, rota con velocidad angular constante alrededor de la línea que une ambas masas. Éste es un movimiento relativo verificable de los dos cuerpos. Imaginemos ahora que cada uno de los cuerpos ha sido examinado por medio de instrumentos de medida en reposo con respecto al mismo, y que se muestra que la superficie de S_1 es una esfera y la de S_2 es un elipsoide de revolución. Acto seguido planteamos la pregunta: ¿cuál es la razón de esta diferencia entre los dos cuerpos? Ninguna respuesta puede admitirse como epistemológica satisfactoria[12], a menos que la razón dada sea un *hecho de experiencia observable.* La ley de causalidad no tiene el significado de un enunciado acerca del mundo de la experiencia, excepto cuando *hechos observables* aparecen en última instancia como causas y efectos.

La mecánica newtoniana no da una respuesta satisfactoria a esta pregunta. Se pronuncia como sigue: las leyes de la mecánica se aplican al espacio R_1, con respecto al cual el cuerpo S_1 está en reposo, pero no al espacio R_2 con respecto al cual el cuerpo S_2 está en reposo. Pero el espacio privilegiado R_1 de Galileo, así introducido, es una causa meramente *facticia,* y no algo que pueda ser observado. Es evidente, por lo tanto, que la mecánica de Newton no satisface realmente el requisito de causalidad en el caso bajo consideración, sino que lo ha ce sólo aparentemente, puesto que hace a la causa facticia R_1 responsable de la diferencia observable en los cuerpos S_1 y S_2.

La única respuesta satisfactoria debe ser que el sistema físico consistente en S_1 y S_2 no revela dentro de sí mismo ninguna causa imaginable a la que pueda remitirse el diferente comportamiento de S_1 y S_2. Por consiguiente, la causa debe estar *fuera* de este sistema. Tenemos que asumir que las leyes generales de movimiento, que en particular determinan las formas de S_1 y S_2 deben ser tales que el comportamiento mecánico de S_1 y S2 está condicionado en parte, y en aspectos muy esenciales, por masas distantes que no han sido incluidas en el sistema bajo consideración. Estas masas distantes y sus movimientos con respecto a S_1 y S_2 deben considerarse entonces como la sede de las causas (que deben ser susceptibles de observación) del diferente comportamiento de nuestros dos cuerpos S_1 y S_2. Ellas asumen el papel de la causa facticia R_1. De todos los espacios imaginables R_1, R_2, etc., en cualquier tipo de movimiento relativo mutuo, no existe ninguno que podamos considerar privilegiado *a priori* sin reavivar la objeción epistemológica

[12] Por supuesto, una respuesta puede ser satisfactoria desde el punto de vista de la epistemología, y pese a todo ser físicamente errónea si está en conflicto con otras experiencias.

antes mencionada. *Las leyes de la física deben ser de tal naturaleza que se aplican a sistemas de referencia en cualquier tipo de movimiento.* Por este camino llegamos a una extensión del postulado de relatividad.

Además de este poderoso argumento de la teoría del conocimiento, existe un hecho físico bien conocido en favor de una extensión de la teoría de la relatividad. Sea K un sistema de referencia galileano, i. e. un sistema con respecto al cual (al menos en la región tetradimensional en consideración) una masa, suficientemente distante de otras masas, se mueve con movimiento uniforme en línea recta. Sea K', un segundo sistema de referencia que se mueve con respecto a K con traslación *uniformemente acelerada.* Entonces, con respecto a K', una masa suficientemente distante de otras masas tendría un movimiento acelerado tal que la magnitud y dirección de su aceleración son independientes de la composición material y estado físico de la masa.

¿Permite esto a un observador en reposo con respecto a K' inferir que él está en un sistema de referencia "realmente" acelerado? La respuesta es negativa; pues la relación antes mencionada de masas libremente movibles respecto a K' puede interpretarse igualmente bien de la siguiente manera. El sistema de referencia K' no está acelerado, pero el territorio espaciotemporal en cuestión está bajo el dominio de un campo gravitatorio que genera el movimiento acelerado de los cuerpos con respecto a K'.

Esta visión se hace posible para nosotros por la enseñanza de la experiencia acerca de la existencia de un campo de fuerzas, a saber, el campo gravitatorio, que posee la extraordinaria propiedad de impartir la misma aceleración a todos los cuerpos[13]. El comportamiento mecánico de los cuerpos con respecto a K' es el mismo que se presenta a la experiencia en el caso de sistemas que solemos considerar como "estacionarios" o como "privilegiados". Por consiguiente, desde el punto de vista físico, se sugiere inmediatamente la hipótesis de que los sistemas K y K' deben ser ambos considerados con igual derecho como "estacionarios", es decir, tienen el mismo título como sistemas de referencia para la descripción física de los fenómenos.

---

[13] Eötvös ha demostrado experimentalmente que el campo gravitatorio tiene esta propiedad con gran exactitud.

Se verá a partir de estas reflexiones que al seguir la teoría de la relatividad general nos veremos llevados a una teoría de la gravitación, puesto que podemos "producir" un campo gravitatorio cambiando meramente el sistema de coordenadas. También será obvio que el principio de la constancia de la velocidad de la luz *in vacuo* debe ser modificado, puesto que fácilmente reconocemos que la trayectoria de un rayo luminoso con respecto a K' debe ser en general curvilínea, si con respecto a K la luz se propaga en línea recta con una velocidad constante definida.

4.1.3 El continuo espacio-temporal. Requisito de convariancia general para las ecuaciones que expresan las leyes generales de la naturaleza

En mecánica clásica, así como en la teoría de la relatividad especial, las coordenadas de espacio y tiempo tienen un significado físico directo. Decir que un suceso tiene x_1 como coordenada X_1 significa que la proyección del suceso sobre el eje de X_1, determinada por reglas de medir rígidas y de acuerdo con las reglas de la geometría euclidiana, se obtiene colocando una regla de medir dada (la unidad de longitud) x_1 veces a partir del origen de coordenadas a lo largo del eje de X_1. Decir que un suceso puntual tiene $x_4=t$ como coordenada X_4 significa que un reloj estándar, construido para medir el tiempo con un período unidad definido, y que es estacionario con respecto al sistema de coordenadas y prácticamente coincidente en el espacio con el suceso puntual[14], habrá medido $x_4=t$ períodos en la ocurrencia del suceso.

Esta idea del espacio y el tiempo ha estado siempre en la mente de los físicos, incluso si, como regla, no han sido conscientes de ella. Está claro a partir del papel que estos conceptos desempeñan en las medidas físicas; también debe subyacer a las reflexiones del lector sobre la sección precedente (2) para conectar cualquier significado con lo que allí ha leído. Pero ahora demostraremos que debemos dejarla de lado y reemplazarla por una visión más general para poder completar el postulado de relatividad general, si la

[14] Suponernos la posibilidad de verificar la "simultaneidad" de sucesos inmediatamente próximos en el espacio, o –por hablar con más precisión– para inmediata proximidad o coincidencia en el espacio-tiempo, sin dar una definición de este concepto fundamental.

teoría de la relatividad especial se aplica al caso especial de ausencia de un campo gravitatorio.

En un espacio que está libre de campos gravitatorios introducimos un sistema de referencia galileano K *(x, y, z, t),* y también un sistema de coordenadas K' *(x', y', z', t')* en rotación uniforme con respecto a K. Consideramos que los orígenes de ambos sistemas así como sus ejes Z coinciden en todo momento. Demostraremos que para una medida espacio-temporal en el sistema K' no puede mantenerse la definición anterior del significado físico de longitudes y tiempos. Por razones de simetría es evidente que un círculo alrededor del origen en el plano X, Y de K puede considerarse al mismo tiempo como un círculo en el plano X', Y' de K'. Supongamos que la circunferencia y el diámetro de este círculo han sido medidos con una medida unidad infinitamente pequeña comparada con el radio, y que tenemos el cociente de ambos resultados. Si este experimento se realizara con una regla de medir en reposo con respecto al sistema galileano K, el cociente sería π. Con una regla de medir en reposo con respecto a K', el cociente sería mayor que π. Esto se entiende inmediatamente si concebirnos el proceso global de medir desde el sistema "estacionario" K, y tenemos en consideración que la regla de medir aplicada a la periferia sufre una contracción lorentziana, mientras que la aplicada a lo largo del radio no la sufre. Por lo tanto, la geometría euclidiana no se aplica a K'. La noción de coordenadas definida más arriba, que presupone la validez de la geometría euclidiana, deja de ser válida por consiguiente en relación al sistema K'. Así, también, somos incapaces de introducir un tiempo correspondiente a los requisitos físicos en K', indicado por relojes en reposo con respecto a K'. Para convencernos de esta imposibilidad, imaginemos dos relojes de idéntica constitución colocados uno en el origen de coordenadas y el otro en la circunferencia del círculo, y ambos concebidos desde el sistema "estacionario" K. Por un resultado familiar de la teoría de la relatividad especial, el reloj en la circunferencia –juzgado desde K– marcha más lento que el otro, porque el primero está en movimiento y el último en reposo. Un observador en el origen común de coordenadas, capaz de observar el reloj en la circunferencia por medio de luz, vería por consiguiente que se retrasa respecto al reloj que tiene ante él. Puesto que él no estará preparado para admitir que la velocidad de la luz a lo largo del camino en cuestión dependa explícitamente del tiempo, interpretará sus observaciones como algo que demuestra que el reloj en la circunferencia "realmente" marcha más lento que el reloj en e! origen. Por lo tanto, se verá obligado a definir el tiempo de tal manera que la marcha de un reloj depende de dónde pueda estar el reloj.

Por consiguiente, llegamos a este resultado: en la teoría de la relatividad general, el espacio y el tiempo no pueden definirse de manera tal que las diferencias de las coordenadas espaciales puedan medirse directamente por la regla de medir unidad, ni las diferencias en la coordenada temporal por un reloj estándar.

El método empleado hasta ahora para tender coordenadas en el continuo espacio-temporal de una manera definida deja así de ser válido, y parece que no hubiera otra forma que nos permitiera adaptar sistemas de coordenadas al universo tetradimensional, de modo que pudiéramos esperar de su aplicación una formulación particularmente simple de las leyes de la naturaleza. De modo que no hay nada sino considerar todos los sistemas de coordenadas imaginables, en principio, como igualmente adecuados para la descripción de la naturaleza. Esto viene a exigir que:

Las leyes generales de la naturaleza deben expresarse por ecuaciones que sean válidas para todos los sistemas de coordenadas. Es decir, sean covariantes con respecto a cualesquiera sustituciones (generalmente covariantes).

Es evidente que una teoría física que satisfaga este postulado también será adecuada para el postulado de relatividad general. Pues la suma de todas las sustituciones incluye, en cualquier caso, a aquellas que corresponden a todos los movimientos relativos de sistemas de coordenadas tridimensionales. Que este requisito de covariancia general, que despoja al espacio y el tiempo del último residuo de objetividad física, es un requisito general, se verá a partir de la siguiente reflexión. Todas nuestras verificaciones espacio-temporales equivalen invariablemente a una determinación de coincidencias espacio-temporales. Si, por ejemplo, los sucesos consistieran meramente en el movimiento de puntos materiales, entonces nada sería observable en definitiva salvo los encuentros de dos o más de dichos puntos. Además, los resultados de nuestras medidas no son nada más que verificaciones de tales encuentros de los puntos materiales de nuestros instrumentos de medida con otros puntos materiales, coincidencias entre las manecillas de un reloj y puntos en la esfera de un reloj, y sucesos puntuales observados que suceden en el mismo lugar y al mismo tiempo.

La introducción de un sistema de referencia no tiene otro propósito que facilitar la descripción de la totalidad de tales coincidencias. Asignamos al universo cuatro variables espacio-temporales x_1, x_2, x_3, x_4 de tal manera que para todo suceso puntual existe un correspondiente sistema de valores de las variables $x_1 \ldots x_4$. A dos sucesos puntuales coincidentes corresponde un sistema de valores de las variables $x_1 \ldots x_4$ i. e.la coincidencia se caracteriza por la identidad de las coordenadas. Si, en lugar de las variables $x_1 \ldots x_4$ introducirnos funciones de ellas, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 como un nuevo sistema de coordenadas, de modo que los sistemas de valores se hacen corresponder uno a otro sin ambigüedad, la igualdad de las cuatro coordenadas en el nuevo sistema servirá también como una expresión de la coincidencia espacio-temporal de los dos sucesos puntuales. Puesto que toda nuestra experiencia física puede reducirse en última instancia a tales coincidencias, no hay ninguna razón inmediata para preferir ciertos sistemas de coordenadas a otros. Es decir, llegamos al requisito de covariancia general.

5. Consideraciones cosmológicas sobre la teoría de la relatividad general[15]

Es bien sabido que la ecuación de Poisson

$$V^2\phi = 4\pi K\rho \qquad (1)$$

en combinación con las ecuaciones de movimiento de un punto material no es por el momento un sustituto perfecto para la teoría de Newton de acción a distancia. Aún hay que tener en cuenta la condición de que en el infinito espacial el potencial Φ tiende hacia un valor límite fijo. Existe un estado de cosas análogo en la teoría de la gravitación en relatividad general. También aquí debemos suplementar las ecuaciones diferenciales con condiciones límite en el infinito espacial, si realmente vamos a considerar que el universo tiene una extensión espacial infinita.

En mi tratamiento del problema planetario escogí dichas condicio-

[15] "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie", 1917, 142-152.

nes límite en forma de la siguiente hipótesis: es posible seleccionar un sistema de referencia de modo que en el infinito espacial todos los potenciales gravitatorios g_{uv} se hagan, constantes. Pero no es en absoluto evidente *a priori* que podamos establecer las mismas condiciones límite cuando querernos tomar en consideración porciones más grandes del universo físico. En las páginas siguientes se ofrecerán las reflexiones que, hasta el presente, he hecho sobre esta cuestión de fundamental importancia.

5.1 La teoría newtoniana

Es bien sabido que la condición límite de Newton del límite constante para Φ en el infinito espacial lleva a la concepción de que la densidad de materia se hace cero en el infinito. Pues imaginemos que pueda haber un lugar en el espacio universal en el cual el campo gravitatorio de materia, visto a gran escala, posee simetría esférica. Se sigue entonces de la ecuación de Poisson que, para que Φ pueda tender a un límite en el infinito la densidad media p debe decrecer hacia cero más rápidamente que $1/r^2$ a medida que aumenta la distancia r al centro del universo[16]. En este sentido, por consiguiente, el universo según Newton es finito, aunque puede poseer una masa total infinitamente grande.

De esto se sigue en primer lugar que la radiación emitida por los cuerpos celestes dejará, en parte, el sistema newtoniano del universo, saliendo radialmente hacia fuera, para hacerse inefectiva y perderse en el infinito. ¿Puede pasar lo mismo con los cuerpos celestes? Difícilmente es posible dar una respuesta negativa a esta pregunta. En efecto, se sigue de la hipótesis de un límite finito para Φ en el infinito espacial que un cuerpo celeste con energía cinética finita puede llegar al infinito espacial superando las fuerzas de atracción newtonianas. Por la mecánica estadística este caso debe darse de vez en cuando, siempre que la energía total del sistema estelar –transferida a una única estrella– sea suficientemente grande para enviar la estrella en su viaje al infinito, de donde nunca puede volver.

[16] ρ es la densidad media de materia, calculada para una región que es grande comparada con la distancia entre estrellas fijas vecinas, pero pequeña en comparación con las dimensiones del sistema estelar completo.

Podríamos tratar de evitar esta dificultad peculiar suponiendo un valor muy alto para el potencial límite en el infinito. Ésa sería una forma posible, si el propio valor del potencial gravitatorio no estuviera necesariamente condicionado por los cuerpos celestes. Lo cierto es que nos vemos obligados a considerar la ocurrencia de cualesquiera grandes diferencias de potencial del campo gravitatorio como algo que contradice los hechos. Tales diferencias deben ser realmente de un orden de magnitud tan bajo que las velocidades estelares generadas por ellas no superen las velocidades realmente observadas.

Si aplicamos a las estrellas la ley de distribución de Boltzmann para moléculas, asimilando el sistema estelar a un gas en equilibrio térmico, encontramos que el sistema estelar newtoniano no puede existir en absoluto. En efecto, existe una razón finita de densidades correspondiente a la diferencia de potencial finita entre el centro y el infinito espacial. Una anulación de la densidad en el infinito implica así una anulación de la densidad en su centro.

Apenas parece posible superar estas dificultades sobre la base de la teoría newtoniana. Podemos preguntarnos si pueden eliminarse mediante una modificación de la teoría newtoniana. Antes de nada, indicaremos un método que no pretende ser tomado seriamente; meramente sirve como contrapunto para lo que sigue. En lugar de la ecuación de Poisson escribimos

$$V^2\phi - \lambda\phi = 4\pi k\rho \qquad (2)$$

donde λ denota una constante universal. Si ρ_o es la densidad uniforme de distribución de masa, entonces

$$\phi = -\frac{4\pi k}{\lambda}\rho_0 \qquad (3)$$

es una solución de la ecuación (2). Esta solución correspondería al caso en el que la materia de las estrellas fijas estuviera distribuida uniformemente por el espacio, si se hace la densidad ρ_o igual a la densidad media real de materia en el universo. La solución entonces corresponde a una extensión infinita del espacio central, llena uniformemente de materia. Si, sin realizar ningún cambio de densidad media, imaginamos que la materia no esté uniformemente distribuida localmente, habrá, además del Φ con el valor constante de la ecuación (3), un Φ adicional, que en la vecindad de masas más densas se parecerá tanto más al campo newtoniano cuanto menor sea $\lambda\Phi$ en comparación con $4\pi K\rho$.

Un universo así constituido no tendría centro, con respecto a su campo gravitatorio. No habría que suponer una disminución de densidad en el infinito espacial, sino que tanto el potencial medio como la densidad media quedarían constantes en el infinito. El conflicto con la mecánica estadística que encontrábamos en el caso de la teoría newtoniana no se repite. Con una densidad definida pero extraordinariamente pequeña la materia está en equilibrio, sin que se requiera ninguna forma material interna (presiones) para mantener el equilibrio.

5.2 Las condiciones de contorno según la teoría de la relatividad general

En la presente sección llevaré al lector por el camino que yo mismo he recorrido, un camino más bien áspero y sinuoso, porque de otro modo no puedo esperar que se tome mucho interés en el resultado final del viaje. La conclusión a la que llegaré es que las ecuaciones de campo de la gravitación que he defendido hasta ahora necesitan todavía una ligera modificación, de modo que sobre la base de la teoría de la relatividad general pueden evitarse aquellas dificultades fundamentales que se han presentado en 1 como enfrentadas a la teoría newtoniana. Esta modificación corresponde perfectamente a la transición de la ecuación de Poisson (1) a la ecuación (2) de 1. Finalmente inferimos que las condiciones de contorno en el infinito espacial desaparecen por completo, porque el continuo universal con respecto a sus dimensiones espaciales debe verse como un continuo autocontenido de volumen (tridimensional) espacial finito.

La opinión que yo mantenía hasta hace poco tiempo, respecto a las condiciones límite a fijar en el infinito espacial, se basaban en las siguientes consideraciones. En una teoría de la relatividad consistente no puede haber inercia *relativa al "espacio",* sino sólo una inercia de *unas masas con respecto a otras.* Si, por consiguiente, yo tengo una masa a distancia suficiente de todas las demás masas en el universo, su inercia debe reducirse a cero. Trataremos de formular matemáticamente esta condición.

Según la teoría de la relatividad general el momento negativo viene dado por las tres primeras componentes, y la energía por la última componente del tensor covariante multiplicado por $\sqrt{-g}$

$$m\sqrt{-g g_{\mu\alpha}}\frac{dx_a}{ds}$$

donde, como siempre, hacemos

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu \qquad (5)$$

En el caso particularmente claro de la posibilidad de escoger el sistema de coordenadas de modo que el campo gravitatorio en cada punto sea espacialmente isótropo, tenemos de forma más simple

$$ds^2 = -A\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) + B dx_4^2$$

Si, además, al mismo

$$\sqrt{-g} = 1 = \sqrt{A^3 B}$$

obtenemos de (4), en primera aproximación para velocidades pequeñas,

$$m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_1}{dx_4}, m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_2}{dx_4}, m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_3}{dx_4}$$

para las componentes del momento, y para la energía (en el caso estático)

$$m\sqrt{B}$$

De las expresiones para el momento se sigue $m\frac{A}{\sqrt{B}}$ desempeña el papel de la masa en reposo. Puesto que *m* es una constante intrínseca de la masa puntual, independientemente de su posición, ésta expresión, si retenemos la condición $\sqrt{-g = 1}$ en el infinito espacial, sólo puede anularse cuando A disminuye hasta cero mientras que B aumenta hasta infinito. Parece, por lo tanto, que tal degeneración de los coeficientes $g_{\mu\nu}$ es exigida por el postulado de relatividad de toda la inercia. Este requisito implica que la energía potencial $m\sqrt{B}$ se hace infinitamente grande en el infinito. Así pues, una masa puntual nunca puede abandonar el sistema; y una investigación más detallada muestra que lo mismo se aplica a los rayos luminosos. Un sistema del universo con un comportamiento semejante de los potenciales gravitatorios en el infinito no correría así el riesgo de echar a perder lo que se ha propuesto hasta ahora en conexión con la teoría newtoniana.

Quiero señalar que las hipótesis simplificadoras acerca de los potenciales gravitatorios sobre las que se basa este razonamiento han sido introducidas meramente por razón de claridad. Es posible encontrar formulaciones generales para el comportamiento de las $g_{\mu\nu}$ en el infinito que expresan los puntos esenciales de la cuestión sin hipótesis restrictivas adicionales.

En este punto, con la amable asistencia del matemático J. Grommer, investigué campos gravitatorios estáticos, con simetría central, que degeneran en el infinito de la forma mencionada. Se aplicaban los potenciales gravitatorios $g_{\mu\nu}$ y a partir de ellos se calculaba el tensor-energía $T_{\mu\nu}$ de materia sobre la base de las ecuaciones de campo de la gravitación. Pero aquí se demostraba que para el sistema de las estrellas fijas no puede intervenir en absoluto ninguna condición de contorno de este tipo, como también ha remarcado recientemente el astrónomo de Sitter.

El tensor-energía contravariante $T^{\mu\nu}$ de la materia ponderable viene dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}$$

donde ρ es la densidad de materia en la medida natural. Con una elección apropiada del sistema de coordenadas las velocidades estelares son muy pequeñas en comparación con la de la luz. Por lo tanto, podemos sustituir $\sqrt{g_{44}}\, dx_4$ por *ds.* Esto nos muestra que todas las componentes de $T^{\mu\nu}$ deben ser muy pequeñas en comparación con la última componente T^{44}. Pero fue completamente imposible reconciliar esta condición con las condiciones de contorno escogidas. Visto en retrospectiva, este resultado no parece sorprendente. El hecho de las pequeñas velocidades de las estrellas permite la conclusión de que donde quiera que haya estrellas fijas, los potenciales gravitatorios (en nuestro caso $\sqrt{B}$) nunca pueden ser mucho mayores que aquí en la Tierra. Esto se sigue de un razonamiento estadístico, exactamente como en el caso de la teoría newtoniana. En cualquier caso, nuestros cálculos me han convencido de que no pueden postularse tales condiciones de degeneración para las $g_{\mu\nu}$ en el infinito espacial.

Tras el fracaso de este intento, se ofrecen dos posibilidades.

(a) Podemos exigir, como en el problema de los planetas, que, con una elección adecuada del sistema de referencia, las $g_{\mu\nu}$ en el infinito espacial se aproximen a los valores

$$
\begin{array}{cccc}
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

(b) Podemos abstenernos por completo de fijar condiciones de contorno para el infinito espacial que reclamen validez general; pero en el límite espacial del dominio en consideración tenemos que dar las $g_{\mu\nu}$ por separado en cada caso individual, como hasta ahora estábamos habituados a dar por separado las condiciones iniciales para el tiempo.

La posibilidad *(b)* no ofrece ninguna esperanza de resolver el problema, sino que equivale a abandonarlo. Ésta es una posición irrebatible, que actualmente es asumida por De Sitter[17]. Pero debo confesar que semejante resignación total en esta cuestión fundamental es para mí algo difícil. Yo no la aceptaré hasta que se haya demostrado vano todo esfuerzo por avanzar hacia una visión satisfactoria.

La posibilidad *(a)* es insatisfactoria en más de un aspecto En primer lugar, aquellas condiciones de contorno presupone una elección definida del sistema de referencia, que es contraria al espíritu del principio de relatividad. En segundo lugar, si adoptamos esta idea, dejamos de satisfacer el requisito de la relatividad de la inercia. Pues la inercia de un punto de masa material *m* (en medida natural) depende de las $g_{\mu\nu}$; pero éstas difieren poco de sus valores postulados, dados antes, para el infinito espacial. Así pues, la inercia estaría *influida,* pero no estaría *condicionada* por la materia (presente en el espacio finito). Si sólo hubiera presente una masa puntual finita, según esta visión, poseería inercia, y de hecho una

[17] En 1916.

inercia casi tan grande como cuando está rodeado por las demás masas del universo real. Finalmente, frente a esta visión deben plantearse las objeciones estadísticas que se mencionaron con respecto a la teoría de Newton.

De lo que se ha dicho ahora se verá que no he tenido éxito en formular condiciones de contorno para el infinito espacial. De todas formas, hay todavía una posible salida, sin renunciar como se sugería en *(b).* En efecto, si fuera posible considerar el universo como un continuo que es *finito (cerrado) con respecto a sus dimensiones espaciales,* no necesitaríamos en absoluto ninguna de tales condiciones de contorno. Procederemos a demostrar que el postulado de relatividad general y el hecho de las pequeñas velocidades estelares son compatibles con la hipótesis de un universo espacialmente finito; aunque ciertamente, para llevar a cabo esta idea, necesitamos una modificación generalizadora de las ecuaciones de campo de la gravitación.

5.3 El universo especialmente finito con una distribución uniforme de materia

Según la teoría de la relatividad general el carácter métrico (curvatura) del continuo espaciotemporal tetradimensional está definido en cada punto por la materia en dicho punto y el estado de dicha materia. Por lo tanto, debido a la falta de uniformidad en la distribución de la materia, la estructura métrica de este continuo debe ser por fuerza extraordinariamente complicada. Pero si estamos interesados sólo en la estructura a gran escala, podemos representarnos la materia como estando uniformemente distribuida sobre espacios enormes, de modo que su densidad de distribución es una función variable que varía de forma extraordinariamente lenta. Así pues, nuestro procedimiento recordará algo al de los geodestas que aproximan por un elipsoide la forma de la superficie terrestre, que a pequeña escala es extraordinariamente complicada.

El hecho más importante que extraemos de la experiencia acerca de la distribución de materia es que las velocidades relativas de las estrellas son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Por ello pienso que por el momento podemos basar nuestro razonamiento en la siguiente hipótesis aproximada. Existe un sistema de referencia con respecto al cual la materia puede considerarse permanentemente en reposo. Con respecto a este sistema, por consiguiente, el tensor-energía contravariante $T^{\mu\nu}$ de materia es, debido a (5), de la forma simple

$$\begin{array}{cccc|} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{array} \tag{6}$$

El escalar ρ de la densidad (media) de distribución puede ser *a priori* una función de las coordenadas espaciales. Pero si suponemos que el universo es espacialmente finito, nos vemos impulsados a la hipótesis de que ρ debe ser independiente de la localización. En esta hipótesis basamos las consideraciones que siguen.

En lo que concierne al campo gravitatorio, se sigue de la ecuación de movimiento del punto material

$$\frac{d^2 x_v}{ds^2} + (\alpha\beta, v)\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0$$

que un punto material en un campo gravitatorio estático sólo puede permanecer en reposo cuando g_{44} es independiente de la localización. Puesto que, además, presuponemos independencia de la coordenada temporal x_4 para todas las magnitudes, podemos exigir para la solución requerida que, para toda x_v

$$g_{44} = 1 \tag{7}$$

Además, como sucede siempre con problemas estáticos, tendremos que hacer

$$g_{44} = g_{24} = g_{34} = 0 \tag{8}$$

Queda ahora por determinar aquellas componentes del potencial gravitatorio que definen las relaciones puramente geométrico-espaciales de nuestro continuo ($g_{11}, g_{12} \ldots g_{33}$). De nuestra hipótesis sobre la uniformidad de distribución de las masas que generan el campo se sigue que la curvatura del espacio requerido debe ser constante. Con esta distribución de masa, por consiguiente, el requerido continuo finito de las x_1, x_2, x_3, con x_4, constante, será un espacio esférico.

Llegamos a un espacio semejante, por ejemplo, de la siguiente manera. Partimos de un espacio euclídeo de cuatro dimensiones $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, con un elemento de línea *dσ;* sea, por consiguiente

$$\delta\sigma^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2 \qquad (9)$$

En este espacio consideramos la hipersuperficie

$$R^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 \qquad (10)$$

donde R denota una constante, Los puntos de esta hipersuperficie forman un continuo tridimensional, un espacio esférico de radio de curvatura R.

El espacio euclídeo tetradimensional del que partimos sirve sólo para una definición conveniente de nuestra hipersuperficie. Sólo nos interesan aquellos puntos de la hipersuperficie que tienen propiedades métricas en acuerdo con las del espacio físico con una distribución uniforme de materia. Para la descripción de este continuo tridimensional podemos emplear las coordenadas ξ_1, ξ_2, ξ_3, (la proyección sobre el hiperplano $\xi_4=0$), puesto que, debido a (10), ξ_4 puede expresarse en términos de ξ_1, ξ_2, ξ_3. Eliminando ξ_4 de (9) obtenernos para el elemento de línea del espacio esférico la expresión

$$\left.\begin{aligned} d\sigma^2 &= \gamma_{\mu\nu} d\xi_\mu d\xi_\nu \\ \gamma_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} + \frac{\xi_\mu \xi_\nu}{R^2 - \rho^2} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

donde $\delta_{\mu\nu}=1$, si $\mu=v$; $\delta_{\mu\nu}=0$, si $\mu\neq v$, y $\rho^2= \xi^2_1+\xi^2_2+\xi^2_3$. Las coordenadas escogidas son convenientes cuando se trata de examinar el entorno de uno de los dos puntos $\xi_1= \xi_2 = \xi_3= 0$.

Ahora, el elemento de línea del universo espacio-temporal tetradimensional requerido también nos está dado. Para el potencial $g_{\mu\nu}$ cuyos dos índices difieren de 4, tenemos que hacer

$$g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu} + \frac{x_{\mu} x_{\nu}}{R^2 - \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}\right) \qquad (12)$$

ecuación que, en combinación con (7) y (8), define perfectamente el comportamiento de reglas de medir, relojes y rayos luminosos.

Bibliografía[18]

DE SITTER, Willem (1916) *Akademie van Wetenschappen te Amsterdam,* Section of Sciences, 8 nov., cfr. Einstein, 1911.

EINSTEIN, Albert (1917) "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie", *Sitzunsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (Berlin), 142-152.

- (1916) "Die Grundlage der allgemeinen Relarivitätstheorie", *AnnaJen der Physik,* Vol. 354, No. 7, 769-822.

- (1911) "über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes", *Annalen der Physik,* No. 35, 898-908.

- (1907) "Ueber das Relativitatprinzip und die aus demselb gezogenen Folgerungen", Jahruch der Radiokt und Elektronik, Johannes Stark, No. 4, 411-462.

- (1905) "Zur Elektrodynamik bewegter körper", *Annalen der Physik,* No. 17, 891-921.

EÖTVÖS, Loránd (1901) *Természettudományi. Közlöny. Havi folyóirat. Közérdekú ismeretek terjesztésére (La cuestión de la forma de la tierra. Resumen del discurso de Eötvös a la Academia de Ciencias de Hungría),* cfr. Einstein, 1911.

FABRY, C., BOÍSSON, H. (1909) *Comptes Rendus,* No. 148, 688-690, cfr. Einstein, 1911.

JEWELL, L. E. (1987) *Journal de Physique*, No. 6, 84, cfr. Einstein, 1911.